PROSEMINAR ALGEBRA WS 2014

Die mit ^{s} gekennzeichnete Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten und nächsten Dienstag im Proseminar abzugeben. Aufgaben mit * sind etwas anspruchsvoller.

7 Betrachte den Einheitskreis $G = S^1$ als Untergruppe von $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(a) Zeige, dass G eine Lie-Gruppe ist.

$Hinweis$: Finde dazu für jedes $a \in G$ einen Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ einer offenen Umgebung U von a in $\mathbb{R}^2$ auf eine offene Teilmenge V des $\mathbb{R}^2$, der $G \cap U$ auf eine offene Teilmenge einer Geraden abbildet.

(b) Identifiziere G mit der additiven Gruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(c) Identifiziere G mit der multiplikativen Gruppe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

8 (a) Bestimme alle Untergruppen von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

(b) Ist $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$ isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Kläre zuerst, welche Verknüpfungen jeweils betrachtet werden.

9 (a) Finde eine Gruppenstruktur auf $G = \{(A, b) \in \mathbb{C}^{n^2} \times \mathbb{C},\ \det(A) \cdot b = 1\}$.

(b) Zeige, dass G eine algebraische Gruppe ist.

10^s (a) Beschreibe die universelle Eigenschaft für die Faktorgruppe einer Gruppe G nach einem Normalteiler H.

$Hinweis$: Eine solche Faktorgruppe ist eine Gruppe F zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\pi : G \to F$, also ein Paar (F, π), sodass gilt: ...

(b) Zeige, dass die Menge G/H der Restklassen $\overline{x} = xH$ mit der Verknüpfung $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$ und der kanonischen Abbildung $\pi : G \to G/H$ die universelle Eigenschaft erfüllt.

11 Es seien $H \subset G$ und $K \subset H$ jeweils Normalteiler, sodass auch K in G normal ist.

(a) Zeige, dass H/K Normalteiler in G/K ist.

(b) Beschreibe $(G/K)/(H/K)$.

(c)* Zeige, dass die A_4 Untergruppen $K \subset H$ besitzt, sodass K in H und H in G normal ist, nicht aber K in G.

12* Beschreibe die Symmetriegruppe des Diamantenmoleküls.